CC BY NC SA

revemop
10.33532/revemop.v1n1a7
eISSN 2596-0245

Estudo das funções trigonométricas a partir da Teoria da Aprendizagem Significativa

Felipe de Almeida Costa

Norma Suely Gomes Allevato

Resumo: Este artigo apresenta uma análise da produção de estudantes na resolução de uma situação-problema envolvendo funções trigonométricas. A atividade foi extraída do Caderno do Aluno, material elaborado pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo. Participaram da resolução estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de São Paulo. O trabalho dos estudantes foi realizado em grupos. O desenvolvimento da atividade envolvia um organizador prévio elaborado no GeoGebra e a consideração dos pesquisadores de que conhecimentos prévios estavam disponíveis na aquisição do conhecimento novo envolvido, subsidiados pela Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. A situação envolveu questões relativas às funções y = Asen(Bx) + C e y = Acos(Bx) + C e teve por objetivo possibilitar o aprofundamento de conhecimentos sobre funções trigonométricas, mais especificamente a avaliação dos efeitos dos parâmetros A, B e C. As análises revelaram que, no uso de um *software* de geometria dinâmica, na condição de organizador prévio e com a existência de conhecimentos prévios, as funções y = sen(x) e y = cos(x) potencializam a aprendizagem dos estudantes acerca dos conhecimentos novos da situação-problema proposta.

Palavras-chave: Educação Matemática. Funções Trigonométricas. GeoGebra. Aprendizagem Significativa.

Felipe de Almeida Costa
Doutorando em Ensino de Ciências e Matemática (Unicsul). Professor do Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza (CEETEPS-SP) e Diretor de escola da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE-SP), São Paulo, Brasil.
felipeacosta@prof.educacao.sp.gov.br

Norma Allevato
Doutora em Educação Matemática (Unesp). Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Cruzeiro do Sul (Unicsul), São Paulo, Brasil.
normallev@gmail.com

Recebido em 10/09/2018
Aceito em 10/10/2018
Publicado em 01/01/2019

Trigonometric functions from the theory of meaningful learning

Abstract: The present article presents an analysis of student output in solving a problem situation involving parametric trigonometric functions. The situation used was extracted from the Student Notebook, material prepared by the Education Department of the State of São Paulo. 40 students from a high school class from a public school in São Paulo participated in the resolution, one of the authors of this article being a teacher and responsible for the application of the activity. The work of the students was carried out in groups of 5. The development of the activity involved a previous organizer elaborated in GeoGebra, and the consideration of the researchers of what previous knowledge was available in the acquisition of the new knowledge involved in the situation, in accordance with the Theory of Learning Significant of Ausubel. The problem situation involved questions related to the functions y = Asin(Bx) + C and y = Acos(Bx) + C, and aimed to allow a deeper understanding of trigonometric functions, but specifically to evaluate the effects of parameters A, B and C. The analyzes revealed that the use of dynamic geometry *software* as a prior organizer and the existence of previous knowledge, the functions y = sin(x) and y = cos(x) enhance students' learning about new.

Keywords: Mathematics Education. Trigonometric Functions. *GeoGebra*. Meaningful Learning.

Estudio de las funciones trigonométricas a partir de la Teoría del Aprendizaje Significativo

Resumen: Este artículo presenta un análisis de la producción de estudiantes en la resolución de una situación-problema involucrando funciones trigonométricas. La actividad fue extraída del Cuaderno del

Alumno, material elaborado por la Secretaría de Estado de Educación de São Paulo. Participaron de la resolución estudiantes del 2º año de la secundaria de una escuela pública de São Paulo. El trabajo de los estudiantes se realizó en grupos. El desarrollo de la actividad involucra un organizador previo elaborado en GeoGebra y la consideración de los investigadores de que los conocimientos previos estaban disponibles en la adquisición del nuevo conocimiento implicado, subsidiados por la Teoría del Aprendizaje Significativo de David Ausubel. La situación involucró cuestiones relativas a las funciones y = Asen(Bx) + C e y = Acos(Bx) + C y tuvo por objetivo posibilitar la profundización de conocimientos sobre funciones trigonométricas, más específicamente la evaluación de los efectos de los parámetros A, B y C. Los análisis revelaron que, en el uso de un software de geometría dinámica, en la condición de organizador previo y con la existencia de conocimientos previos, las funciones y = sen (x) e y = cos (x) potencian el aprendizaje de los estudiantes acerca de los conocimientos nuevos de la situación-problema propuesta.

Palabra clave: Educación Matemática. Funciones Trigonométricas. GeoGebra. Aprendizaje Significativo.

1 Introdução

Neste artigo, apresentamos a aplicação de uma situação-problema e sua análise, envolvendo 21 atividades. O público objeto da investigação deste estudo foram estudantes do 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública de São Paulo, cujo professor é um dos pesquisadores e autores deste trabalho.

A pesquisa foi desenvolvida com base nos constructos da Teoria da Aprendizagem Significativa. Assim sendo, os conceitos subsunçores dos estudantes — necessários, conforme Ausubel, para o estudo de um novo conceito — foram as funções trigonométricas seno y = sen(x) e cos y = cos(x), já conhecidas pelos estudantes, e um organizador prévio do material, um gráfico elaborado com o GeoGebra, como um meio de estabelecer uma relação entre os conhecimentos prévios e o conhecimento novo constante da atividade; ou seja, esse organizador, assim como as funções, objetivava estabelecer a relação cognitiva entre o conhecimento prévio (o que o estudante já sabe) e o novo conhecimento (o que ele deveria saber).

Em nossa prática como professores, percebemos que os estudantes sentem muita dificuldade para construir os conceitos de funções trigonométricas. Diante disso, utilizamos nesta pesquisa uma aplicação desenvolvida no GeoGebra cujo objetivo era organizar os conceitos que seriam trabalhados, ou seja, a aplicação criada seria o organizador prévio do conhecimento dos estudantes.

Em relação ao ensino de trigonometria, os PCN de Matemática para o Ensino Médio indicam que "devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos" (BRASIL, 2000, p. 43). Esses documentos explicitam também que

> outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. Nesse sentido, um projeto envolvendo também a Física pode ser uma grande oportunidade de aprendizagem significativa (BRASIL, 2000, p. 44).

Nesse sentido, os PCN apresentam a importância de que os estudantes tenham contato com as funções trigonométricas, em especial com os seus gráficos, e consigam relacioná-los com os fenômenos periódicos presentes na natureza.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda que, ao ensinar trigonometria, as atividades levem os estudantes a

> identificar as características fundamentais das funções seno e cosseno (periodicidade, domínio, imagem), por meio da comparação das representações em ciclos trigonométricos e em planos cartesianos, com ou sem apoio de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p. 531).

A BNCC acrescenta que para o estudo das funções trigonométricas podem ser utilizadas as tecnologias digitais e pode ser necessário fazer comparações entre os ciclos para compreender a periodicidade, domínio e imagem desse tipo de função.

Nesse sentido, entendemos que nosso trabalho fornece contribuições para o estudo das funções trigonométricas, pois utilizamos a aplicação com o *software* GeoGebra para a realização das comparações entre diferentes funções, buscando perceber o domínio, imagem e período das mesmas. Acrescentamos que existem situações que só podem ser realizadas com o uso do *software*, de modo que a tecnologia fornece novas possibilidades para o ensino.

Costa (2017) apresenta um estudo das funções trigonométricas a partir de um fenômeno periódico. Segundo ele, o uso do GeoGebra potencializou a aprendizagem dos estudantes, tornando-a mais significativa.

A partir do exposto, buscamos, na revisão bibliográfica, artigos sobre estudos que utilizaram a tecnologia para auxiliar no ensino de Matemática, a fim de averiguar o que os autores têm a dizer a esse respeito. Na próxima seção traremos essas discussões.

2 Tecnologias da Informação e Comunicação

Segundo os PCN (BRASIL, 2000), as tecnologias, atualmente, integram um dos principais agentes de transformação da sociedade, pois influenciam os meios de produção, com consequências no dia a dia dos sujeitos. Segundo esses documentos, a calculadora e o computador, simultaneamente ao uso de outras ferramentas tecnológicas, oferecem diversos benefícios:

> - Relativiza[m] a importância do cálculo mecânico e da simples manipulação simbólica, uma vez que por meio de instrumentos esses cálculos podem ser realizados de modo mais rápido e eficiente;
> - Evidencia[m] para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas;
> - Possibilita[m] o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem;
> - Permite[m] que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo (BRASIL, 2000, p. 43-44).

Um estudo bibliográfico envolvendo dissertações, teses e artigos voltados para a temática desta pesquisa possibilitou extrair indicações de que o uso de *softwares* como o GeoGebra é um meio de favorecer a aprendizagem da Matemática.

O estudo de Silva (2015), por exemplo, indica que no ensino da Matemática há a necessidade de uma abordagem contextualizada, ao lado do uso dos recursos tecnológicos, sempre que possível, e priorizando os aspectos práticos dos conteúdos. O estudioso afirma que foi possível mostrar a importância da articulação entre teoria e prática explorando a teoria que embasa funções trigonométricas elementares (seno, cosseno e tangente) a partir da representação gráfica elaborada com a utilização do *software* GeoGebra, aproveitando melhor o tempo disponível em sala de aula. É perceptível que, para esse pesquisador, a atividade desenvolvida com o *software* GeoGebra foi um meio facilitador da articulação dos conhecimentos prévios com os novos conhecimentos, no estudo das funções trigonométricas.

Para Uebel (2015), o uso de mídias digitais motivou os estudantes na aprendizagem das funções trigonométricas, evidenciando que recorrer a essas mídias favoreceu a aprendizagem dos conceitos estudados.

Alben e Filippsen (2006) destacam que o trabalho com o uso de tecnologia é um modo de instigar os estudantes a investir na aprendizagem e, em consequência, favorecê-la, fornecendo um meio de controle e de validação de suas hipóteses.

No trabalho de Costa (2017), os estudantes são apresentados a uma série de construções no GeoGebra com o objetivo de fazê-los relacionar os conceitos de periodicidade às funções trigonométricas. Segundo o autor, o uso desse *software* potencializou a aprendizagem dos estudantes e fez com que vivenciassem situações impossíveis de serem exploradas em uma aula sem o uso de tecnologia.

Na presente pesquisa, optamos por utilizar o *software* de geometria dinâmica GeoGebra para desenvolver as construções gráficas das funções estudadas, por considerar que ele possibilita a visualização e a rápida construção de gráficos, além de favorecer a compreensão, facilitando a observação de algumas características desse tipo de função, em especial o período, a amplitude e a imagem associados às variações dos parâmetros A, B e C das funções apresentadas em $y = A\text{sen}(Bx) + C$ e $y = A\cos(Bx) + C$.

Consideramos que o estudo dessas funções pode despertar o interesse dos estudantes, pois elas podem ser referenciadas a fenômenos da natureza que são periódicos[1] e, numa definição do conceito de modelagem, pode ser necessário fazer ajustes que são possíveis com a mudança dos parâmetros A, B e C. Por isso, entendemos que associar o GeoGebra como facilitador da prática pedagógica promove um processo de aprendizagem significativa dos conteúdos matemáticos.

Na próxima seção apresentaremos a metodologia utilizada na pesquisa.

3 Procedimentos Metodológicos

Esta pesquisa é de abordagem qualitativa, ou seja, buscamos interpretar o fenômeno pesquisado observando-o com profundidade, no sentido de analisar o processo como um todo. Goldenberg (2007) entende que essa abordagem não se preocupa com a implantação de leis para a pesquisa, mas com a compreensão aprofundada dos dados investigados.

Para a obtenção dos dados utilizamos a observação participante. Nesse modelo de investigação, o pesquisador se insere no ambiente pesquisado buscando as ações mais fidedignas que aparecem no meio da pesquisa. Para Vianna (2007), a observação participante: i) possibilita

[1] Movimento das marés, índice pluviométrico, sombra no decorrer dos dias etc.

a entrada a determinados acontecimentos que seriam privativos e aos quais um observador estranho não teria acesso; ii) permite a observação não apenas de comportamentos, mas também de atitudes, opiniões, sentimentos, além de superar a problemática do efeito observador.

Segundo Lüdke e André (1986, p. 28), a observação participante "é uma estratégia que envolve, pois, não só a observação direta, mas todo o conjunto de técnicas metodológicas pressupondo um grande envolvimento do pesquisador na situação estudada".

Os registros das observações foram feitos com o auxílio de um diário de campo, instrumento em que o observador registra as ações observadas quando se insere no meio pesquisado. Esse instrumento pode ser compreendido como

> um dos instrumentos mais ricos de coleta de informações durante o trabalho de campo. É nele que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas, cenários e episódios, e até transcrições de alguns diálogos. Quanto mais próximo do momento da observação for feito o registro, maior será a acuidade da informação (FIORENTINI e LORENZATO, 2012, p. 118-119).

Na pesquisa também utilizamos a análise de dados, buscando relacionar os dados obtidos com a teoria utilizada. Lüdk e e André (1986, p. 38) consideram que "a análise documental pode se constituir em uma técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema".

A próxima seção se destina a explorar a teoria utilizada em nosso estudo.

4 Teoria da Aprendizagem Significativa

As diversas pesquisas de David Ausubel são concentradas principalmente no aprendizado que acontece dentro da sala de aula, dando conta das relações estabelecidas entre um novo conhecimento e as ideias anteriores dos estudantes (conhecimentos prévios). Essa teoria identifica, portanto, como acontece essa organização de ideias e as suas relações.

Moreira (2010) ressalta que o conhecimento prévio não deve ser confundido com a matéria ou conteúdo ensinado anteriormente. O conhecimento prévio é todo e qualquer conhecimento significativo internalizado na estrutura cognitiva do aluno.

Segundo Santos (2014), a teoria de Ausubel é construtivista, pois tem como característica explicar como é formado o novo conhecimento estruturado em conhecimentos anteriores do estudante. Dessa forma, nessa teoria, o estudante é um sujeito protagonista do seu próprio processo de aprendizagem, alguém que vai produzir a transformação que gera conhecimento próprio.

Para Ausubel *et al*. (1980), essa construção não se dá por si mesma e no vazio cognitivo, mas a partir de situações em que o sujeito possa agir sobre o objeto de seu conhecimento, pensar sobre ele e buscar as respostas da sua vivência. Assim, os autores classificam dois tipos de aprendizagem: i) a mecânica, na qual não ocorre um diálogo lógico e claro entre as novas ideias e as já existentes na estrutura cognitiva do sujeito, ou seja, há uma interação não substantiva e literal entre o novo conhecimento e conceitos subsunçores da estrutura cognitiva do estudante; e ii) a significativa, em que o sujeito consegue estabelecer relação substantiva e não arbitrária entre o novo conhecimento e os conhecimentos que já tem.

Para ocorrer a aprendizagem significativa eficazmente em um sujeito, são necessárias duas condições:

> a) a participação ativa do aluno no aprender: se o indivíduo quiser memorizar o material e nunca de modo não arbitrário e literal, então haverá aprendizagem mecânica;
>
> b) a importância do material escolhido não arbitrário ser potencialmente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do material, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem. Cada aprendiz deve fazer essa varredura dos materiais apontando o que tem significado ou não para si próprio (MOREIRA, 1999, p. 154).

A essas condições, a partir de experiências já realizadas, pode-se acrescentar uma terceira: “c) a presença de conceitos subsunçores específicos, para que o novo conceito seja ancorado” (MOREIRA, 1999, p. 154).

Diante disso, para Ausubel *et al*. (1980), o desafio do professor nessa teoria é propor situações nas quais o estudante consiga pôr em jogo os seus conhecimentos e aprenda significativamente o novo saber. Moreira e Buchweitz (1993) esclarecem que essa aprendizagem significativa ocorre quando há um diálogo da nova informação com os subsunçores, ancorando-se em conceitos e proposições relevantes, que já fazem parte da estrutura cognitiva do estudante. Os subsunçores são as bases de uma aprendizagem significativa, ou seja, os seus conhecimentos relevantes, já estabelecidos na estrutura, nos quais serão ancorados os novos conhecimentos.

Assim, a Teoria da Aprendizagem Significativa indica que para aprender alguma coisa é preciso já saber algo, logo, o conhecimento não é gerado do nada, é uma permanente transformação a partir do conhecimento existente (MOREIRA e BUCHWEITZ, 1993).

Com isso, à medida que o estudante vai aprendendo um conceito, este vai se tornando cada vez mais elaborado, mais diferenciado, em consequência da ancoragem de novos aspectos; ao mesmo tempo, torna-se capaz de servir de âncora para a atribuição de significados a outros conhecimentos. Esse processo característico da dinâmica da estrutura cognitiva é denominado *diferenciação progressiva* (MOREIRA e BUCHWEITZ, 1993).

Ausubel *et al*. (1980) advertem que, para aprender um conceito, este deve ser relacionável com um conceito já estabelecido na estrutura cognitiva do estudante, mas pode ocorrer que esses conceitos não sejam suficientes para o sujeito aprender o novo. Neste caso, o professor deve criar situações para fazer uma ponte cognitiva entre o que o estudante sabe e o que deveria saber para assimilar o novo conceito. Essa ponte cognitiva é chamada por Ausubel e seus colaboradores de *organizador prévio do conhecimento*, que pode ser um texto introdutório ao assunto, uma atividade ou uma sequência didática, desde que consiga ajudar o estudante a relacionar os conhecimentos novos com os antigos. Vale ressaltar que esse organizador não substitui os conhecimentos necessários para aprender o novo conceito; assim, se o estudante não tiver os conhecimentos necessários, o novo conceito não é aprendido de forma significativa.

Tendo apresentado esses conceitos básicos, essenciais para a compreensão das análises que desenvolveremos, na próxima seção abordaremos as atividades presentes no Caderno do Aluno e as análises correspondentes.

5 Atividades e análises

A atividade foi proposta a uma turma de 40 estudantes da 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública de São Paulo, sendo um dos autores deste artigo seu professor. Os alunos foram organizados em grupos de cinco. A escolha por desenvolver a atividade dessa forma se deu por entendermos que o trabalho em grupo possibilita aos estudantes compartilhar suas ideias, facilitando o processo de aprendizagem. Esse pressuposto está de acordo com as ideias de Ausubel *et al*. (1980) e Sanches (2005), que consideram importante a interação dos estudantes no processo de aprendizagem.

Burak e Aragão (2012) sinalizam também que atividades em grupo favorecem a discussão, propiciando uma maior assimilação do conhecimento a ser aprendido, já que, nos grupos, o confronto de ideias faz surgir respostas relevantes para a compreensão das relações cognitivas.

Para realização das atividades, os grupos foram levados à sala de informática, onde foram apresentados ao *software* GeoGebra e à atividade em que eles deveriam visualizar a função quando alteravam os controles deslizantes relacionados aos parâmetros A, B e C.

As atividades que conduziram a pesquisa foram retiradas do Caderno do Aluno de Matemática, material organizado e distribuído pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE-SP), que conta com uma série de atividades matemáticas e cujo objetivo é fazer com que os estudantes adquiram habilidades e competências inerentes aos conteúdos estudados. No primeiro volume desse material para alunos da 2ª série do Ensino Médio encontra-se uma sequência didática que trata de gráficos de funções trigonométricas (seno e cosseno).

No Caderno Professor consta para essa atividade que o objetivo "é fazer com que os alunos sejam capazes de construir gráficos de uma função trigonométrica dada e identificar parâmetros importantes para construção de modelos ondulatórios e a partir de um gráfico determinar sua representação algébrica" (SÃO PAULO, 2017b, p. 45). Assim, o material apresenta uma sequência com 21 atividades que têm como proposta fazer com que os estudantes sejam capazes de adquirir as habilidades descritas.

Neste artigo analisamos a atividade 6, escolhida porque admitimos que nela se encontra evidenciada a intencionalidade do material e porque os seus itens *a* e *b*, resolvidos com o auxílio do GeoGebra, podem propiciar aos estudantes uma aprendizagem com significado.

Levamos em conta a necessidade de ancorar uma atividade em conhecimentos prévios dos alunos, pois, conforme Ausubel *et al.* (1980), um conteúdo novo a ser aprendido deve ser potencialmente significativo e deve, ainda, incluir um organizador comparativo. Como os estudantes já tinham algum conhecimento sobre as funções seno e cosseno, esse organizador foi uma atividade elaborada no GeoGebra. Adotamos, nesta pesquisa, o princípio de que o professor/pesquisador deve analisar o material a ser proposto, a fim de que o mesmo possa preencher as condições para favorecer a aprendizagem dos estudantes.

Inicialmente, foi apresentada uma tabela, conforme ilustra a Figura 1.

A proposta era que os alunos preenchessem as células em branco a partir dos valores apresentados nas duas primeiras colunas. Esse preenchimento objetivava ajudá-los a perceber que os valores da quarta coluna ficavam o dobro da terceira e que os valores da quinta coluna são os valores da quarta acrescidos em uma unidade.

6. Observe a tabela a seguir, que contém valores de pares ordenados das funções **y = sen4x**, **y = 2sen4x** e **y = 1 + 2sen4x**. Perceba que foram atribuídos para 4x os valores 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, que são os valores que dividem os quadrantes da circunferência.

a) Complete a tabela:

4x	x	y = sen4x	y = 2sen4x	y = 1 + 2sen4x
0	0			
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$			
π	$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$			
2π	$\frac{\pi}{2}$			

Figura 1: Atividade 6, item *a* (Caderno do Aluno, 2017a, p. 41)

A atividade objetiva levar o estudante a perceber o aumento da amplitude e a translação da função trigonométrica descrita, ou seja, perceber as transformações e as regularidades e responder as perguntas propostas no item b, conforme ilustra a Figura 2. Não fizemos as translações horizontais para esta pesquisa, pois seguimos as ideias presentes no material da SEE-SP.

Repare que, em relação ao gráfico de y = senx, o gráfico de y = 1 + 2sen4x foi deslocado verticalmente, 1 unidade para cima, e teve seu período diminuído 4 vezes e sua amplitude dobrada, efeitos esses causados, respectivamente, pelas constantes 1, 4 e 2. A partir dessa observação, complete a tabela a seguir:

Comparação entre os dois gráficos		
Função	y = senx	y = 1 + 2sen4x
Período		
Imagem		
Amplitude		

Figura 2: Atividade 6, item *b* (Caderno do Aluno, 2017a, p. 42)

No item b, os alunos podem comparar as duas funções. Para solucioná-lo, utilizamos o GeoGebra, com vistas a potencializar a aprendizagem da turma, uma vez que com o uso de “controles deslizantes” seria possível perceber as diferentes características da função seno ao serem modificados os parâmetros A, B e C (Figura 3). Com o uso do *software*, os estudantes conseguem visualizar o que ocorre quando são modificados os valores dos parâmetros, também é possível verificar as duas funções em suas representações algébricas e gráficas ao mesmo tempo.

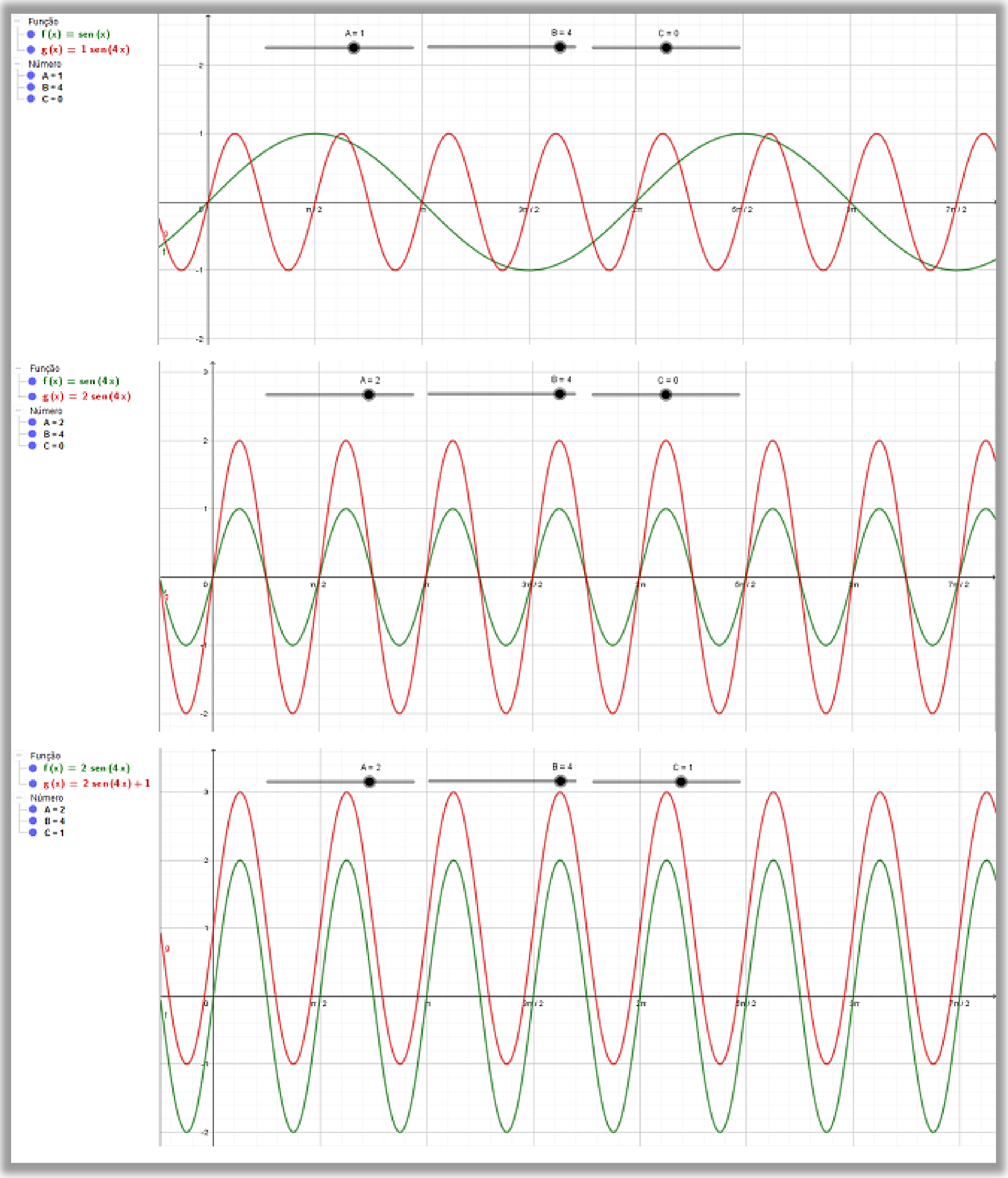


Figura 3: Comparações de funções trigonométricas (Dados da pesquisa)

O *software* potencializou a situação de aprendizagem, pois com ele foi possível visualizar as duas funções e suas diferenças. Com o uso dos controles deslizantes, foi possível que os estudantes representassem inúmeras funções, algo que demandaria muito trabalho ou não seria possível sem o uso do aplicativo.

A aplicação desenvolvida no GeoGebra consistiu em um organizador prévio do conhecimento, pois, ao desenvolver as atividades na aplicação, os estudantes conseguiam estabelecer relações entre os seus conhecimentos prévios e o conhecimento novo. Moreira (2010) descreve um organizador prévio como todo o material ou ação que leva o sujeito a relacionar os conceitos subsunçores aos novos conceitos.

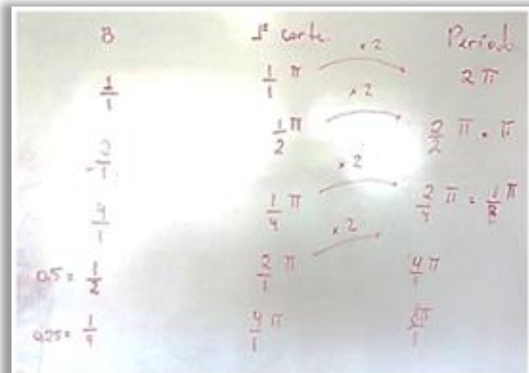
Nesse sentido, o desenvolvimento da atividade auxiliou os estudantes na descoberta das relações entre o parâmetro A e a amplitude e entre o parâmetro B e o período. Logo, a aplicação estabeleceu a ponte cognitiva entre as ideias que os estudantes já tinham das funções y = sen(x) e y = cos(x), e as funções y = Asen(Bx) + C e y = Acos(Bx) + C.

Utilizá-la foi significativo, pois possibilitou explorar os parâmetros e como eles atuaram diretamente na variação de período, amplitude, translação e conjunto imagem de uma função trigonométrica, além de facilitar o trabalho dos estudantes, que, sem precisar esboçar manualmente os gráficos para as observações e comparações, conseguiram atingir os objetivos propostos para a atividade.

A turma conseguiu verificar que o parâmetro A tem seu valor numericamente igual à amplitude da função; visualizou também que o parâmetro B age no período da função, de modo que o período pode ser descrito pela seguinte equação:

$$T = \frac{2\pi}{B}, onde\ T\ é\ periodo\ e\ B\ é\ o\ valor\ numerico\ do\ parâmetro$$

É necessário destacar que para o estabelecimento dessa relação houve a interferência do professor, que trabalhou com os estudantes a fim de levá-los a modificar os valores de B, de modo que percebessem as relações entre B, o primeiro corte[2] e o valor do período (Figura 4). Ainda nessa atividade, o docente trabalhou o conjunto imagem de uma função ajudando os alunos a perceber que esse conjunto é formado por todos os valores que a função pode assumir, que são considerados no eixo da ordenada.



B	1º Corte		Período
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}\pi$	2x →	2π
$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}\pi$	2x →	$\frac{2}{2}\pi = \pi$
$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{4}\pi$	2x →	$\frac{2}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi$
$0,5 = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}\pi$	2x →	$\frac{4}{1}\pi$
$0,25 = \frac{1}{4}$	$\frac{4}{1}\pi$	2x →	$\frac{8}{1}\pi$

Figura 4: Estudo do Período da função (Dados da pesquisa)

2 Nome utilizado pelo professor para indicar a primeira intersecção positiva entre a função e o eixo das ordenadas em funções que não sofreram translação vertical.

Ausubel *et al*. (1980) destacam que o uso de computadores em aula pode facilitar a aquisição dos conceitos pelos estudantes, e em nossa pesquisa percebemos que o seu uso, além de constituir-se em um fator motivacional, possibilitou a visualização de possibilidades de uma dada situação da aprendizagem. No caso apresentado, por exemplo, o *software* conseguiu abarcar todas as funções trigonométricas propostas, além de outras não expostas na atividade. O professor, durante todo o processo, assumiu a metodologia de observação participante, auxiliando os estudantes na construção dos conceitos.

No âmbito da Teoria da Aprendizagem Significativa, a aprendizagem não precisa necessariamente acontecer por descoberta. Na verdade, Ausubel *et al*. (1980) ressaltam que grande parte da aprendizagem acontece de modo receptivo, em que o professor apresenta as ideias de um determinado conceito e o estudante as associa a conhecimentos prévios em sua estrutura cognitiva.

De modo geral, os estudantes conseguiram resolver as questões da atividade proposta. Apresentamos algumas respostas, ilustradas nas figuras 5, 6 e 7.

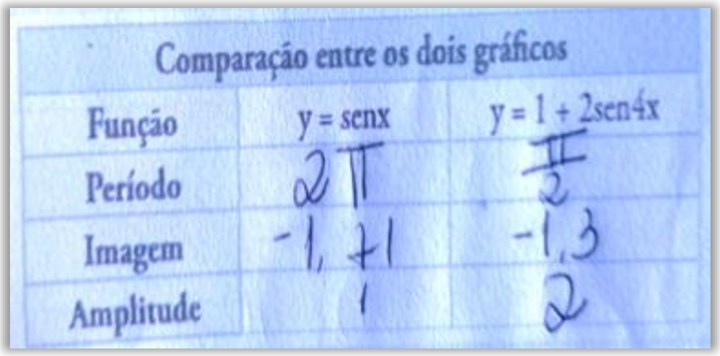
4x	x	y = sen4x	y = 2.sen4x	y = 1 + 2.sen4x
0	0	0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	1	2	3
π	$\frac{\pi}{4}$	0	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	-1	-2	-1
2π	$\frac{\pi}{2}$	0	0	1

Comparação entre os dois gráficos		
	y = senx	y = 1 + 2sen4x
Período	2π	$\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$
Imagem	[-1, +1]	[-1, 3]
Amplitude	1	2

Figura 5: Protocolo das respostas dos alunos – Grupo 1 (Dados da pesquisa)

4x	x	y = sen4x	y = 2sen4x	y = 1 + 2sen4x
0	0	0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{8}$	1	2	3
π	$\frac{\pi}{4}$	0	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{8}$	-1	-2	-1
2π	$\frac{\pi}{2}$	0	0	1

Figura 6: Protocolo das respostas dos alunos – Grupo 3 (Dados da pesquisa)



Comparação entre os dois gráficos		
Função	y = senx	y = 1 + 2sen4x
Período	2π	π/2
Imagem	-1, +1	-1, 3
Amplitude	1	2

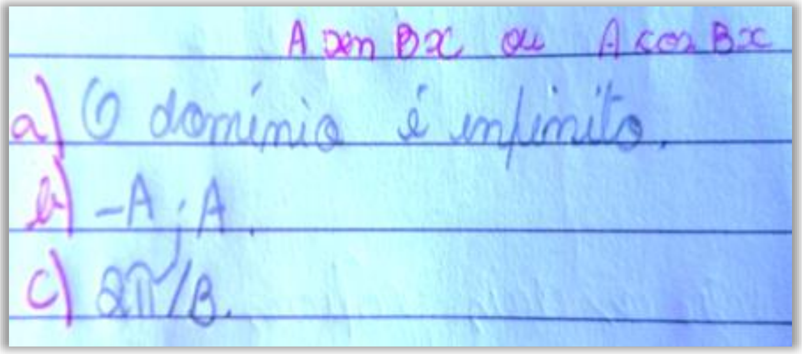
Figura 7: Protocolo das respostas dos alunos – Grupo 3 (Dados da pesquisa)

Como evidenciado pelas Figuras 5, 6 e 7, com o apoio da aplicação os estudantes foram capazes de responder as atividades de maneira correta. Vale ressaltar que o grupo 3 utilizou as ideias de transformação de ângulos para responder as questões, ou seja, a noção de ângulo foi um conhecimento prévio também utilizado por eles.

Para avaliar a aprendizagem, foi solicitado que os estudantes indicassem o domínio (Df(x)) da função trigonométrica, amplitude (A) e período (P) presentes em uma função como a descrita a seguir: f(x) = Asen(Bx).

De acordo com Moreira (2010), um modo de perceber se a aprendizagem foi significativa para os sujeitos é verificar se eles conseguem relacionar o novo conceito em contextos diferentes daquele em que ocorreu a aprendizagem.

As Figuras 8 e 9 ilustram respostas que podem indicar ter havido sucesso no trabalho desenvolvido, de modo que consideramos que os estudantes atingiram o objetivo proposto para a atividade:



A sen Bx ou A cos Bx
a) O domínio é infinito.
b) -A ; A.
c) 2π/B.

Figura 8: Protocolo das respostas dos alunos – Grupo 6 (Dados da pesquisa)

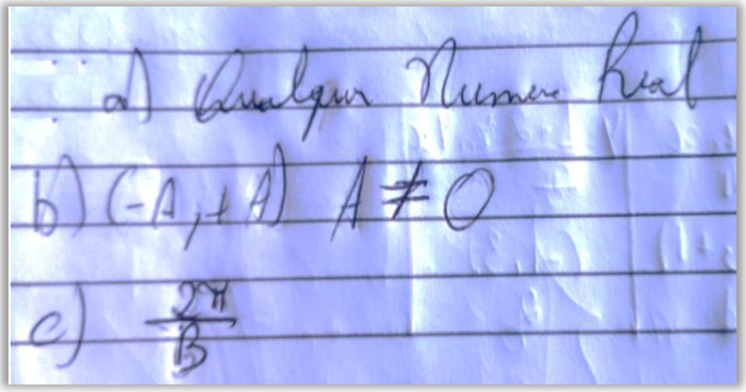


Figura 9: Protocolo das respostas dos alunos - Grupo 8 (Dados da pesquisa)

Os estudantes conseguiram responder satisfatoriamente as duas questões, mas pode-se observar que o grupo 6 (Figura 8) indica como domínio da função o infinito, sem associá-la ao conjunto dos números reais. Para a imagem da função, eles estabeleceram que ela está entre (-A e A). Em relação ao período, indicaram que ele tem como valor $\frac{2\pi}{B}$. Esse grupo mostra entendimento do conceito proposto, embora não apresente em suas respostas uma formalização matemática.

O grupo 8 (Figura 9) também deixou de indicar a notação de conjunto para a resposta do domínio da função, mas estabeleceu que o domínio é qualquer número real. Já para o conjunto imagem, definiu que está de (-A, +A) e acrescentou que isso é valido se o A ≠ 0. Para o período, determinou que é dado pela expressão $\frac{2\pi}{B}$. Também não aparece em suas respostas o formalismo matemático, embora seja perceptível que elas são corretas.

Ausubel *et al*. (1980) já indicavam que, no decorrer da aprendizagem, algumas ideias (funções e conjuntos, no caso de nossa pesquisa) ainda não estão estáveis na estrutura cognitiva do sujeito, fazendo com que ele cometa alguns erros.

Analisando essas atividades, percebemos que os estudantes conseguiram demonstrar entendimento, agora sem a necessidade de aplicação, ou seja, eles parecem ter aprendido significativamente sem o auxílio do material de apoio. Aragão (1976) afirma que quando a aprendizagem é significativa, o estudante consegue estabelecer o conhecimento em sua estrutura cognitiva de modo a expor o conhecimento sem a necessidade de uma situação concreta.

6 Considerações

A análise das atividades realizadas pelos estudantes leva a concluir que o uso do *software* de Geometria Dinâmica (GoGebra) na sua resolução funcionou como um organizador prévio.

Portanto, potencializou o aprendizado dos estudantes, isto é, a aplicação no *software* possibilitou a construção da ponte cognitiva entre o novo conhecimento e os conhecimento prévio que eles possuíam acerca das funções senx e cox, sendo, então, a construção feita no GeoGebra um organizador prévio adequado para a construção dos conceitos de funções trigonométricas com os parâmetros A, B e C, em que f(x) = Asen(Bx) + C e f(x) = Acos(Bx) + C.

Também é possível concluir que os estudantes foram capazes de identificar que o parâmetro A é relacionado à amplitude e o parâmetro B, relacionado ao período.

Nesse sentido, verificamos que esses estudantes foram capazes de identificar parâmetros importantes para a construção de modelos ondulatórios e, a partir de um gráfico, determinar sua representação algébrica, tal como proposto no Caderno do Aluno. A análise não indicou, porém, se os estudantes seriam capazes de construir esses gráficos manualmente, pois utilizaram o *software* para fazê-lo.

Finalmente, evidenciamos que o uso do GeoGebra foi um facilitador para o ensino, pois com o seu uso os estudantes conseguiram visualizar facilmente os gráficos e assim perceber o que ocorria com as mudanças dos parâmetros e as relações estabelecidas entre os parâmetros e o período, imagem e translação do gráfico de uma função.

7 Referências

ALBEN, Maristela de Quadros, FILIPPSEN, Rosane Maria Jardim. Função trigonométrica: um enfoque aplicado ao ensino técnico. *Liberato*, Novo Hamburgo, v. 7, n. 8, p. 1-22, 2006.

ARAGÃO, Rosália Maria Ribeiro de. *Teoria da Aprendizagem Significativa de David P. Ausubel*: sistematização dos aspectos teóricos fundamentais. 1976, 109f. Tese (Doutorado em Ciências) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

AUSUBEL, David Paul; NOVAK, Joseph Donald; HANESIAN, Helen. *Psicologia educacional*. Tradução de Marco Antônio Moreira. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio*. Brasília: MEC/SEB, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*. Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BURAK, Dionísio; ARAGÃO, Rosalia Maria Ribeiro de. *A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa*. Curitiba: CRV, 2012.

COSTA, Felipe de Almeida. *O ensino de funções trigonométricas com o uso da modelagem matemática sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa*. 2017. 142f. Dissertação

(Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2012.

GOLDENBERG, Miriam. *A arte de pesquisar*. Rio de Janeiro: Record, 2007.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli. *Pesquisa em Educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MOREIRA, Marco Antônio. *Aprendizagem significativa*. Brasília: Editora da UnB, 1999.

MOREIRA, Marco Antônio. *Mapas conceituais e aprendizagem significativa*. São Paulo: Centauro, 2010.

MOREIRA, Marco Antônio; BUCHWEITZ, Bernardo. *Novas estratégias de ensino e aprendizagem*: os mapas conceituais e o vê epistemológico. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1993.

SANCHES, Isabel. Compreender, agir, mudar, incluir: da investigação-ação à educação inclusiva. *Revista Lusófona de Educação*, Lisboa, n. 5, p. 127-142, 2005.

SANTOS, Ricardo Ferreira dos. *O uso da modelagem para o ensino da função seno no ensino médio*. 2014. 129f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. *Caderno do Aluno – Matemática*, 2ª série do Ensino Médio, v. 1. São Paulo: SEE, 2017a.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. *Caderno do Professor – Matemática*, 2ª série do Ensino Médio, v. 1. São Paulo: SEE, 2017b.

SILVA, Tiago Henrique Pereira da. *Funções trigonométricas elementares e tecnologia*: algumas aplicações no currículo da rede pública estadual de São Paulo. 2015. 74f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. São José do Rio Preto.

UEBEL, Tamara. *Relacionando a função seno e fenômenos periódicos*: uma experiência com mídias digitais. 2015. 29f. Monografia (Especialização em Matemática, Mídias digitais e Didática para educação básica) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre.

VIANNA, Heraldo Marelim. *Pesquisa em Educação*: a observação. Brasília: Líber livro, 2007.